

Rapport d'EA-512 recherche
Pricing d'options Américaines et Temps d'exercice
Optimal

EDDAOUDI Oussama, LEKEUKA Xavier, SBEITI Daniel

Mars 2024

Table des matières

Introduction	3
1 L'algorithme de Longstaff-Schwartz	4
1.1 Principe de la méthode de pricing	4
1.2 Méthode de sélection du moment optimal pour l'exercice de l'option .	5
1.3 résultats et Analyses	6
2 L'algorithme GPR Tree	10
2.1 Processus gaussiens et Régression	10
2.2 Options américaines à travers des options bermudiennes	12
2.3 La méthode GPR Tree : Démarche	13
2.4 Méthodes de Quasi Monte Carlo (QMC)	15
2.5 Résultats numériques et commentaires	18
Conclusion	25
Références	25

Remerciements

Avant de débiter ce rapport, nous tenons à exprimer notre gratitude envers notre encadrant, Monsieur **Ludovic Goudenège**, pour nous avoir offert l'opportunité de mener à bien une étude aussi enrichissante sur une thématique largement reconnue et débattue dans le domaine de la finance quantitative. Nous le remercions sincèrement pour son engagement et son implication à nos côtés tout au long de ce projet.

Introduction

Le sujet de notre étude repose sur l'examen approfondi d'un élément fondamental des marchés financiers : **les options américaines**. La quête pour une évaluation précise de ces instruments, conjuguée à la détermination du moment optimal de leur exercice, représente un axe central de recherche dans le secteur financier, et constitue le fondement même de notre travail. Une option sur un marché financier est un contrat entre un acheteur et un vendeur de transaction d'un actif sous-jacent S . Sa valeur dépend du prix initial S_0 de l'actif, de sa dynamique et celle des marchés, du *Strike* K (le prix auquel l'acheteur peut acheter ou vendre l'actif sous-jacent à l'expiration de l'option) et de la maturité T (La date d'expiration de l'option).

Dans le contexte des options, l'exercice d'une option européenne se limite à la date d'échéance T , alors qu'une option américaine offre la possibilité d'être exercée à tout moment entre son achat et la date d'échéance T , offrant ainsi un degré de flexibilité supplémentaire. Cette caractéristique soulève naturellement une question essentielle qui ne se pose pas avec les options européennes : **Y a-t-il des méthodes ou des algorithmes permettant de prédire à l'avance la valeur d'une option américaine, et comment déterminer le moment optimal pour exercer celle-ci ?**

Le sujet consiste donc à déterminer d'une part le prix correct (*pricing*) de l'option et d'autre part une stratégie algorithmique fournissant à son détenteur un instant d'exercice optimal lorsque l'actif sous-jacent suit une dynamique de type **Black-Scholes**. Il s'agit donc d'un temps τ^* maximisant le gain moyen :

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}[\Psi(S_\tau)e^{-r\tau}] \quad (1)$$

Ici S_τ est le prix du sous-jacent au temps τ , $\mathcal{T}_{0,T}$ représente l'ensemble de tous les temps d'arrêt sur $[0, T]$ et $\Psi(S_\tau)$ est le payoff de l'option à l'instant τ .

Pour la fonction de payoff Ψ , plusieurs expressions peuvent exister, notamment dans un cadre unidimensionnel, c'est-à-dire pour une option reposant sur un seul actif sous-jacent. Deux expressions célèbres se démarquent :

- La fonction de payoff pour une option de type **call** : $\Psi(x) = (x - K)^+$
- La fonction de payoff pour une option de type **put** : $\Psi(x) = (K - x)^+$

Notre travail repose principalement sur le célèbre algorithme de Longstaff-Schwartz développé dans [4] par (*Longstaff Francis A et Schwartz Eduardo S*). Ainsi que les articles [3] et [2] (*Ludovic Goudenège, Andrea et Antonino*) qui décrivent une approche utilisant la régression par processus gaussiens **GPR** pour le *Pricing* de telles options et étend ces recherches à la mise en oeuvre et l'analyse numérique du temps d'exercice optimal.

1 L'algorithme de Longstaff-Schwartz

1.1 Principe de la méthode de pricing

L'algorithme de Longstaff-Schwartz est une méthode largement utilisée pour estimer le prix des options américaines en utilisant des techniques de simulation de Monte Carlo et de régression polynomiale. Cette approche repose sur les concepts fondamentaux de la **valeur de continuation**, qui représente l'espérance conditionnelle du payoff futur de l'option, étant donné l'information disponible à l'instant actuel et de la **valeur intrinsèque**, le payoff de l'option si on l'exerce à un instant donné.

L'algorithme de Longstaff-Schwartz consiste en plusieurs étapes :

- Générer un grand nombre N de trajectoires de prix de l'actif sous-jacent jusqu'à la date d'échéance T en utilisant un processus stochastique tel que le modèle de Black-Scholes ou un modèle d'arbre binomial discrétisé sur l'intervalle $[0, T]$ en n temps régulièrement espacés $t_i = i\Delta t = i\frac{T}{n}, i = 1, \dots, n$.
- Pour chaque trajectoire, calculer la valeur V_{t_n} du payoff de l'option à la date d'échéance $t_n = T$.
- à l'instant t_{n-1} , calculer la valeur de continuation $C_{t_{n-1}} = e^{-r\Delta t}V_{t_n}$ et définir $V_{t_{n-1}} = \max(\Psi(S_{t_{n-1}}), C_{t_{n-1}})$ pour chaque échantillon .
- Utiliser une régression paramétrique, telle qu'une régression polynomiale ou une régression par *spline*, pour estimer l'apprentissage de la valeur de continuation à chaque période antérieure à la date d'échéance $S_{t_{n-2}} \rightarrow C_{t_{n-2}} = e^{-r\Delta t}V_{t_{n-1}}$.
- Répéter les deux dernières étapes de façon rétrograde jusqu'à l'instant initial $t_0 = 0$.
- Estimer le prix de l'option comme la moyenne empirique sur toutes les trajectoires des valeurs de v_0 obtenues.

Mathématiquement, la valeur de continuation C_{t_i} à la date t_i est définie comme :

$$C_{t_i} = \mathbb{E}_{t_i, S_{t_i}} \left[e^{-r\Delta t} V_{t_{i+1}} \right] \quad (2)$$

L'approche *Least Square Methods* (LSM) utilise la méthode des moindres carrés pour estimer de manière approximative la fonction d'espérance conditionnelle à $t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_1$. Le calcul se fait en rétrograde car le chemin des flux C_t généré par l'option est défini de manière récursive; $C_{t_i} \rightarrow V_{t_i} \rightarrow C_{t_{i-1}}$ car il peut être optimal de s'arrêter au temps t_{i-1} , modifiant ainsi tous les flux le long d'un chemin réalisé w . Spécifiquement, au temps t_{i-1} , en supposant que la forme fonctionnelle inconnue de $C_{t_{i-1}}$ dans l'équation (2) peut être représentée comme une combinaison linéaire d'un ensemble dénombrable de fonctions de base mesurables.

Cette hypothèse peut être justifiée formellement, par exemple, lorsque l'espérance conditionnelle est un élément de l'espace L^2 des fonctions de carré intégrable par rapport à une mesure donnée. Puisque L^2 est un espace de Hilbert, il possède une base orthonormale dénombrable et l'espérance conditionnelle peut être représentée comme une fonction linéaire des éléments de la base.

Choix de l'estimateur

On choisit ici d'estimer la valeur de continuation par régression sur la valeur intrinsèque grâce aux **polynômes de Laguerre**. Ceux-ci constituent en effet une base de fonctions

orthogonales. Elles peuvent être normalisées pour former une base orthonormale pour \mathbf{L}^2 auquel appartient l'espérance conditionnelle.

$$\begin{aligned} L_0(X) &= e^{-X/2} \\ L_1(X) &= e^{-X/2}(1 - X) \\ L_2(X) &= e^{-X/2} \left(\frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2) \right) \\ L_n(X) &= e^{-X/2} \frac{e^X}{n!} \frac{d^n}{dX^n} (X^n e^{-X}) \end{aligned}$$

Dans cette spécification, la valeur de continuation à l'instant t_i peut alors s'estimer par :

$$C_{t_i} = \sum_{j=0}^l \hat{\beta}_j^{(i)} L_j(S_{t_i}) \quad (3)$$

avec $(L_j)_{j \in \{0, \dots, l\}}$ comme les l premiers polynômes de Laguerre et $(\beta_j^{(i)})_{j \in \{0, \dots, l\}}$ comme les coefficients de régression à déterminer par la méthode LSM.

D'autres types de fonctions de base incluent les polynômes de Hermite, de Legendre, de Chebyshev, de Gegenbauer et de Jacobi. (voir [1])

Détermination des coefficients de régression

On détermine les $(\beta_j^{(i)})_{j \in \{0, \dots, l\}}$ par la méthode LSM. On régresse à partir de N simulations les valeurs $e^{-r\Delta t} (V_{t_i}^k)_{k \in \{1, \dots, N\}}$ au temps t_i par les valeurs $(S_{t_i}^k)_{k \in \{1, \dots, N\}}$:

$$\begin{pmatrix} \hat{\beta}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \hat{\beta}_l^{(i)} \end{pmatrix} = (\mathbf{L}^T \mathbf{L})^{-1} \mathbf{L}^T \begin{pmatrix} e^{-r\frac{T}{n}} (V_{t_i}^1) \\ \vdots \\ e^{-r\frac{T}{n}} (V_{t_i}^N) \end{pmatrix} \quad (4)$$

avec $\mathbf{L}_{j,k} = L_j(S_{t_i}^k)$

1.2 Méthode de sélection du moment optimal pour l'exercice de l'option

L'algorithme de Longstaff-Schwarz est un outil de pricing d'options américaines. Toutefois, nous avons pu l'exploiter pour parvenir à un algorithme de recommandation de point d'exercice optimal. L'idée de la stratégie est de conserver à chaque pas de temps les coefficients de régressions obtenus et les utiliser sur de nouvelles données (un nouvel échantillon suivant la dynamique souhaitée) pour prédire la valeur moyenne de continuation dans le temps et ainsi savoir s'il est raisonnable ou pas d'exercer l'option.

Considérons de ce fait la matrice des coefficients de régressions obtenus de manière séquentielle lors de la phase de pricing :

$$\hat{\beta} = (\hat{\beta}_j^{(i)})_{i=1, \dots, n; j=1, \dots, l}$$

Ainsi qu'une trajectoire test S_t suivant la dynamique Black-Scholes $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$.

À l'instant t_i , la valeur de continuation de l'option est alors estimée par la prédiction donnée par le modèle polynomial de Laguerre avec coefficients les $(\hat{\beta}_j^{(i)})$; $j = 1, \dots, l$, suivant l'expression :

$$\hat{C}_{t_i} = \sum_{j=0}^l \hat{\beta}_j^{(i)} L_j(S_{t_i}) \quad (5)$$

La stratégie consiste alors, partant de l'instant initial $t_0 = 0$, à comparer la valeur de continuation donnée par (5) et la valeur intrinsèque $\Psi(S_{t_i})$ à cet instant, et à exercer l'option au premier instant où la valeur intrinsèque dépasse la valeur de continuation.

L'algorithme de décision est donc le suivant, pour un temps donné t_i , $i \in \{0, \dots, n-1\}$:

$$\begin{cases} \Psi(S_{t_i}) \leq \hat{C}_{t_i} : \text{conserver l'option} \\ \Psi(S_{t_i}) > \hat{C}_{t_i} : \text{exercer l'option et prendre } \tau^* = t_i \end{cases} \quad (6)$$

1.3 résultats et Analyses

1.3.1 Dynamique Black-Scholes du Sous-jacent

Nous optons ici pour la simulation des trajectoires du sous-jacent selon le modèle de Black-Scholes, avec un taux d'intérêt r et une volatilité σ :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

On travaille donc avec les trajectoires suivantes pour le sous-jacent (ici $S_0 = K = 100$, $\sigma = 0.2$, $r = 0.05$, $n = 100$ et $T = 1$) :

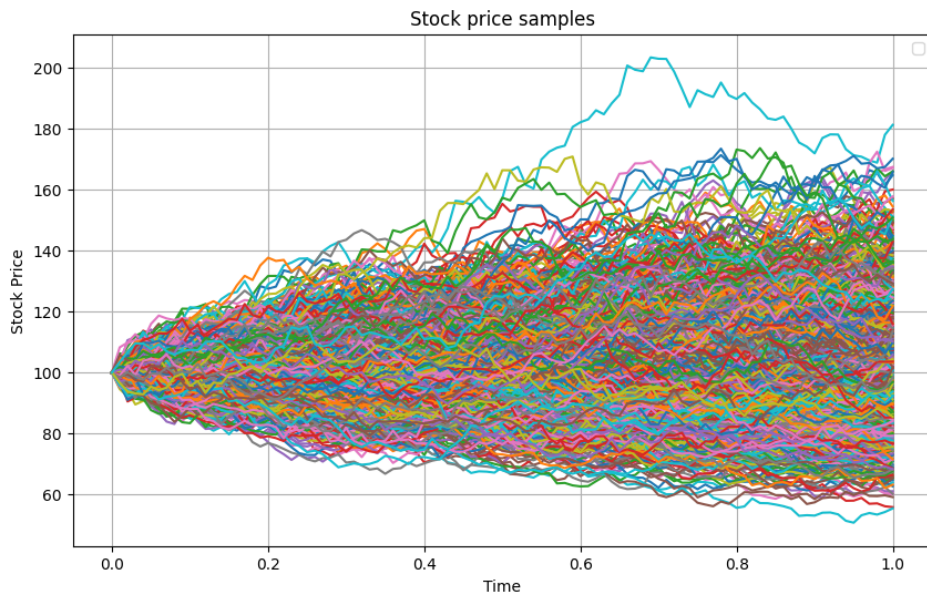


FIGURE 1 – $N = 1000$ échantillons de trajectoires du sous-jacent selon Black-Scholes

Pricing

L'algorithme de Longstaff-Schwartz que nous avons implémenté nous a permis de réaliser l'évaluation d'une option américaine de type **put** sur un sous-jacent (dimension 1) avec les caractéristiques précédentes. Nous avons également évalué le prix de l'option européenne correspondante. Les résultats se trouvent dans le tableau 1 ci-dessous :

Option	Prix
Put Américain	6.12
Put Européen	5.85

TABLE 1 – Prix d'une Option **put** avec $N = 1000$ échantillons

Bien que nous n'ayons pas de *Benchmark* pour comparer ce prix, le résultat est déjà satisfaisant, notamment parce que le prix de l'option américaine est supérieur à celui de l'option européenne. De plus, nous avons comparé les valeurs données par cet algorithme avec celles fournies par des calculateurs de prix d'options unidimensionnelles en ligne, et nous avons constaté des résultats très proches. Dans la suite, nous présenterons une autre méthode d'évaluation du prix de l'option américaine et nous confirmerons la valeur obtenue précédemment.

Détermination du temps d'exercice

Nous allons maintenant étudier les résultats de la stratégie de détermination du temps d'exercice proposée dans l'équation 6.

La figure 2 ci-contre présente l'évolution de la valeur de continuation et de la valeur intrinsèque de l'option en fonction du prix de l'actif sous-jacent. Cette évolution est représentée pour un seul échantillon tiré aléatoirement parmi les N utilisés dans l'algorithme de Longstaff-Schwartz précédent.

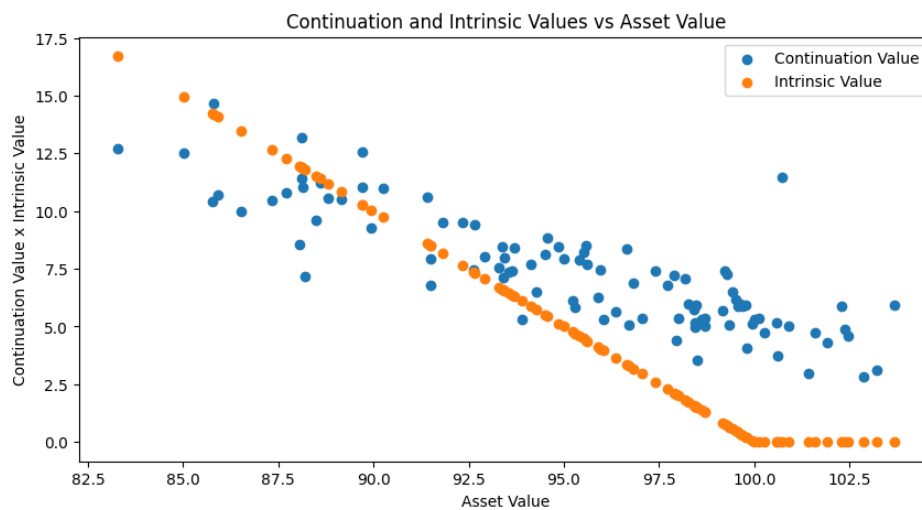


FIGURE 2 – Continuation et valeur intrinsèque en fonction du prix de l'actif

Les figures 3 et 4 ci-dessous représentent respectivement la décision recommandée sous forme binaire (1 pour exercer, 0 pour continuer) et les points d'exercices recommandés sur la

courbe de la dynamique de l'actif. Ces données sont spécifiques à la même trajectoire aléatoire utilisée pour avoir la figure 2. Chaque décision est prise en supposant que l'option n'a pas encore été exercée. Il est à noter que ces points ne sont que des propositions ; le détenteur peut choisir de ne pas exercer l'option à un instant donné. Cependant, une fois qu'il l'exerce, le contrat prend fin. Il est important de souligner que la stratégie adoptée pour une nouvelle dynamique, sur laquelle le modèle n'a pas été entraîné, consiste à exercer dès le premier point d'exercice recommandé (le plus tôt).

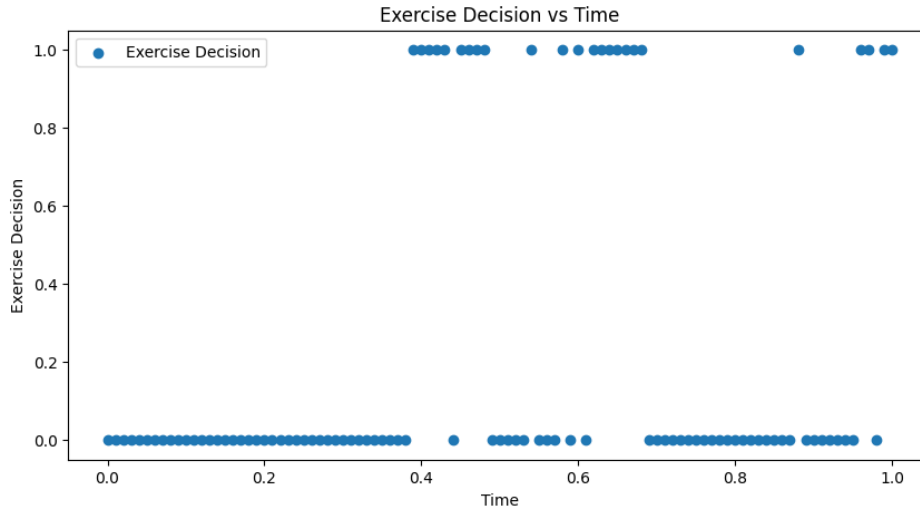


FIGURE 3 – Décision d'exercice en fonction de la valeur du temps

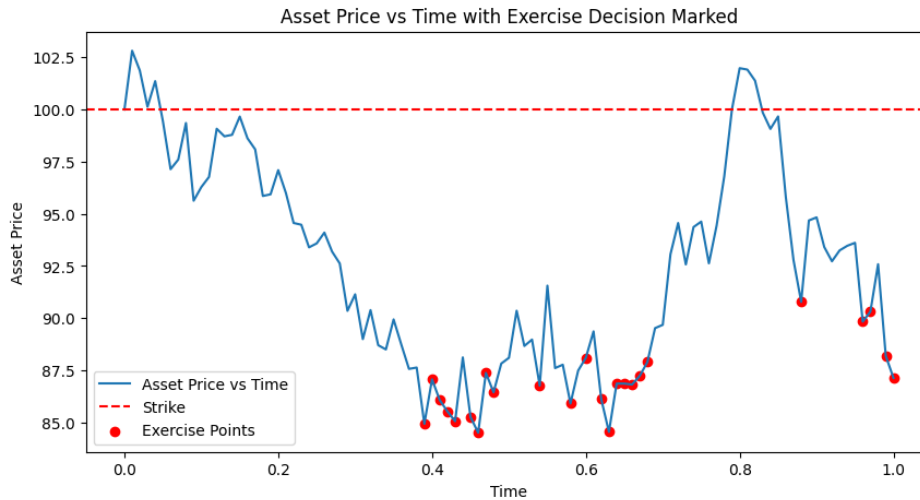


FIGURE 4 – Prix de l'actif et décision d'exercice en fonction du temps

On remarque que pour cet échantillon, l'algorithme recommande judicieusement l'exercice dans des zones où le prix de l'actif est très bas, correspondant à des payoffs importants.

Par la suite, nous évaluerons cet algorithme sur un grand nombre d'échantillons non observés lors de la phase d'apprentissage afin de juger de sa capacité de généralisation. À cette fin, nous introduirons une métrique, le PnL (Profit and Loss), moyenné sur un nombre N d'échantillons que l'algorithme n'a jamais rencontrés. Enfin, nous comparerons ce PnL avec celui d'une autre méthode de pricing que nous introduirons par la suite.

Évaluation de la stratégie : Calcul du PnL

Nous avons réalisé une estimation Monte Carlo du PnL moyen généré pour une option de type **Put** sur $N = 1000$ nouveaux échantillons suivant la dynamique Black-Scholes $(S^{(k)})_{k \in \{1, 2, \dots, N\}}$.

Le PnL_k pour un échantillon k est défini comme la différence entre la valeur intrinsèque (actualisée) au premier temps d'exercice recommandé par l'algorithme τ^* et la valeur de l'option $p(t = 0, S_0, K, T)$:

$$\text{PnL}_k = e^{-r\tau^*} \max(0, K - S_{\tau^*}^{(k)}) - p(0, S_0, K, T) \quad (7)$$

On calcule ensuite le PnL moyen pour ces divers échantillons :

$$\text{PnL} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{PnL}_k \quad (8)$$

Le tableau ci-contre présente le résultat obtenu après évaluation sur N échantillons que l'algorithme n'a jamais observé :

Longstaff-Schwartz	PnL moyen	Intervalle de confiance (95%)
$N = 1000$	0.10	[-0.29, 0.50]
$N = 5000$	-0.05	[-0.24, 0.12]

Le temps d'arrêt τ^* représente le premier instant où la valeur intrinsèque de l'option dépasse la valeur de continuation espérée. Le choix d'exercer dès le **premier instant** est caractéristique de cette stratégie appliquée à l'option américaine, qui n'autorise l'exercice qu'une seule fois au maximum. En effet, en examinant attentivement la figure 4, on constate généralement la présence de plusieurs instants de proposition. Cette approche offre ainsi une extension aux **Options échelonnées**, permettant aux détenteurs d'exercer une partie de l'option à certaines dates et le reste à des dates ultérieures.

Les résultats obtenus, mettant en évidence le PNL moyen ainsi que les intervalles de confiance associés, suggèrent que l'algorithme de Longstaff-Schwartz reproduit efficacement les prix des options. En effet, un algorithme de réplcation efficace devrait générer un PnL moyen proche de zéro en l'absence d'opportunité d'arbitrage. Nous allons dès à présent explorer une autre méthode, basée sur l'approche Gaussian Process Regression ([3]). Cette méthode offre plus de flexibilité en termes de dimension des actifs, car nous avons la possibilité de détenir différentes options reposant sur différents actifs. De plus, nous pourrions évaluer différents types d'options, notamment les Geometric Basket Put Options, Arithmetic Basket Put Options et Call On The Max Options, tout en proposant des signaux d'exercice conduisant à de meilleurs résultats.

2 L'algorithme GPR Tree

2.1 Processus gaussiens et Régression

2.1.1 La Régression par Processus Gaussiens (GPR) : Description

Dans cette partie de notre rapport, nous allons décrire la méthode sur laquelle nous nous sommes principalement appuyés : le Gaussian Process Regression (GPR), également connu sous le nom de régression par processus gaussien. La régression par processus gaussien est une méthode d'apprentissage supervisé utilisée pour résoudre des problèmes de régression et de classification probabiliste. Le GPR a été appliqué pour résoudre différents types de problèmes du monde réel, notamment en science des matériaux, en chimie, en physique et en biologie.

Le GPR est une approche bayésienne non paramétrique pour l'inférence. Au lieu d'inférer une distribution sur les paramètres d'une fonction paramétrique, les processus gaussiens peuvent être utilisés pour inférer directement une distribution sur la fonction d'intérêt. Un processus gaussien définit une fonction a priori, qui est convertie en une fonction a posteriori après avoir observé certaines valeurs de la distribution a priori.

Un processus gaussien est un processus aléatoire où tout point x dans le domaine réel est associé à une variable aléatoire $f(x)$, et où la distribution conjointe d'un nombre fini de ces variables $p(f(x_1), \dots, f(x_n))$ suit une distribution gaussienne :

$$p(f|X) \sim \mathcal{N}(f|\mu, K) \quad (9)$$

où $f = (f(x_1), \dots, f(x_n))$, $\mu = (m(x_1), \dots, m(x_n))$ et $K_{i,j} = k(x_i, x_j)$.

Dans l'Équation (1), m est la fonction moyenne, généralement $m(x) = 0$ car les processus gaussiens sont suffisamment flexibles pour modéliser la moyenne même si elle est définie à une valeur arbitraire au départ. k est une fonction définie positive appelée fonction de noyau ou fonction de covariance. Par conséquent, un processus gaussien est une distribution définie par K , la matrice de covariance. Si deux points sont similaires dans l'espace du noyau, les valeurs de fonction en ces points seront également de valeurs similaires.

Supposons que nous disposions des valeurs de la fonction sans bruit f à certaines entrées x . Dans ce cas, une a priori GP peut être convertie en une a posteriori GP, qui peut être utilisée pour faire des prédictions à de nouvelles entrées. Par la définition d'un GP, la distribution conjointe des valeurs observées et des prédictions est gaussienne, et peut être partitionnée comme suit (voir [5]) :

$$\begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} K & K^* \\ (K^*)^T & K^{**} \end{pmatrix}\right) \quad (10)$$

Dans laquelle $K^* = k(X, X^*)$ et $K^{**} = k(X^*, X^*)$. Si nous avons m points de données d'entraînement et n nouvelles observations (c'est-à-dire, points de données de test), K est une matrice $m \times m$, K^* est une matrice $m \times n$, et K^{**} est une matrice $n \times n$.

Basée sur les propriétés des distributions gaussiennes, la distribution prédictive (c'est-à-dire, postérieure) est donnée par :

$$p(f|X^*, X, f) \sim \mathcal{N}(f^*|\mu^*, \Sigma^*) \quad (11)$$

où

$$\mu^* = K^T K^{-1} f$$

et

$$\Sigma^* = K^{**} - K^T K^{-1} K^*$$

Supposons maintenant que nous ayons la fonction objective avec du bruit, $y = f + \epsilon$, où le bruit :

$$\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_y^2 I) \quad (12)$$

est distribué de manière indépendante et identique (i.i.d.). La distribution postérieure peut alors être représentée comme :

$$p(f|X^*, X, y) \sim \mathcal{N}(f^*|\mu^*, \Sigma^*) \quad (13)$$

où

$$\mu^* = K^T K_y^{-1} f$$

et

$$\Sigma^* = K^{**} - K^T K_y^{-1} K^*$$

où $K_y = K + \sigma_y^2 I$.

Enfin, pour inclure le bruit σ dans les prédictions, nous devons l'ajouter à la diagonale de la matrice de covariance :

$$p(f|X^*, X, y) \sim \mathcal{N}(f^*|\mu^*, \Sigma^* + \sigma_y^2 I) \quad (14)$$

2.1.2 Le choix du Noyau (Kernel)

Il existe un nombre infini de noyaux que nous pouvons choisir lors de l'ajustement du GPR. Celui que nous avons utilisé dans le projet est un noyau spécifique, mais le plus utilisé parmi toutes les fonctions de noyau, qui est le noyau de la fonction de base radiale (RBF). Le noyau RBF est un noyau stationnaire. Il est également connu sous le nom de noyau "Squared exponential". Il est paramétré par une longueur d'échelle (l), qui peut être soit un scalaire soit un vecteur avec le même nombre de dimensions que les entrées, et un paramètre de variance (σ^2), qui contrôle la dispersion de la distribution. Le noyau est donné par :

$$k(x_i, x_j) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{(x_j - x_i)^2}{2l^2}\right) \quad (15)$$

Le noyau RBF est infiniment différentiable, ce qui implique que les GPR avec ce noyau ont des dérivées quadratiques moyennes de tous les ordres et sont donc lisses dans leur forme. Les paramètres σ , l de la fonction de noyau et σ_y du bruit sont appelés hyperparamètres et doivent être estimés. Une approche courante est de considérer les estimations de maximum de vraisemblance (MV) qui peuvent être obtenues en maximisant la fonction de log-vraisemblance des données d'entraînement, c'est-à-dire en maximisant la fonction suivante :

$$-\frac{1}{2} \log(\det(K_y)) - \frac{1}{2} y^T K_y^{-1} y$$

2.2 Options américaines à travers des options bermudiennes

2.2.1 Les options américaines dans le modèle de Black-Scholes multidimensionnel

Soit $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$ le processus sous-jacent en d dimensions. Un tel processus stochastique est supposé évoluer de manière aléatoire selon le modèle multidimensionnel de Black-Scholes. Sous la mesure risque-neutre, un tel modèle est donné par l'équation suivante :

$$dS_t^i = (r - \eta_i)S_t^i dt + \sigma_i S_t^i dW_t^i, \quad i = 1, \dots, d \quad (16)$$

avec $S_0 = (S_0^1, \dots, S_0^d)^\top \in \mathbb{R}_+^d$ le prix spot, r le taux d'intérêt spot (constant), $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d)^\top$ le vecteur des taux de dividendes (constants), $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_d)^\top$ le vecteur des volatilités (constants), W un mouvement brownien d -dimensionnel corrélé et ρ_{ij} le coefficient de corrélation instantanée entre W_t^j et W_t^i . De plus, soit $\Psi(S_T)$ le payoff associé à l'option. Ainsi, le prix au temps t d'une option américaine ayant une maturité T et une fonction de paiement $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est alors

$$v^{AM}(t, x) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t, T}} \mathbb{E}^{t, x} \left[e^{-r(\tau-t)} \Psi(S_\tau) \right], \quad (17)$$

où $\mathcal{T}_{t, T}$ représente l'ensemble de tous les temps d'arrêt prenant des valeurs sur $[t, T]$ et $\mathbb{E}^{t, x}[\cdot]$ est l'espérance conditionnelle sachant toute l'information au temps t et en supposant que $S_t = x$.

À des fins de simulation, le modèle de Black-Scholes en d -dimensionnel peut être écrit alternativement en utilisant la décomposition de Cholesky. Plus précisément, pour $i \in \{1, \dots, d\}$ on peut écrire

$$dS_t^i = S_t^i((r - \eta_i)dt + \sigma_i \Sigma_i dB_t), \quad (18)$$

où B est un mouvement brownien en d -dimensionnel et Σ_i est la i -ème ligne de la matrice Σ définie comme la racine carrée de la matrice de corrélation Γ , donnée par

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1d} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{d1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Introduction aux Options Bermudiennes

Les options bermudiennes sont des instruments financiers dérivés qui permettent à leur détenteur d'exercer leur droit à tout moment pendant une période prédéterminée avant la date d'expiration. Elles ont une forme intermédiaire entre les options américaines, qui peuvent être exercées à tout moment jusqu'à leur date d'expiration, et les options européennes, qui ne peuvent être exercées qu'à la date d'expiration.

L'une des principales caractéristiques des options bermudiennes est leur flexibilité en termes de dates d'exercice. Contrairement aux options américaines qui offrent une flexibilité totale, les options bermudiennes spécifient un ensemble discret de dates d'exercice potentielles pendant la durée de vie du contrat.

2.2.3 Options américaines via options bermudiennes

Nous approchons le prix d'une option américaine avec le prix d'une option Bermudienne sur le même panier. Plus précisément, soit N le nombre de pas de temps et $\Delta t = \frac{T}{N}$ l'incrément

de temps. Les dates d'exercice discrètes sont $t_n = n\Delta t$, avec $n = 1, \dots, N$. Si x représente le vecteur des prix sous-jacents à la date d'exercice t_n , alors le prix de l'option Bermudienne v^{BM} est donné par :

$$v^{BM}(t_n, x) = \max \left(\Psi(x), E_{t_n, x} \left[e^{-r\Delta t} v^{BM}(t_{n+1}, S_{t_{n+1}}) \right] \right) \quad (19)$$

Le prix d'une option bermudienne sera bien sûr plus petit que le prix réel de l'option américaine équivalente, ce qui signifie que nous sousestimons la valeur de l'option. Mathématiquement, cela se traduit par l'inégalité suivante :

$$v^{BM}(0, S_0) < v^{AM}(0, S_0) \quad (20)$$

Ceci est dû au fait que nous pouvons choisir des moments d'exercice plus avantageux dans les intervalles stricts formés par la séquence uniforme $(t_i)_{i \in \{0, 1, \dots, N\}}$.

2.3 La méthode GPR Tree : Démarche

2.3.1 Description de l'algorithme

Tout d'abord, en connaissant la fonction $v^{BM}(t_{n+1}, \cdot)$, on peut calculer $v^{BM}(t_n, \cdot)$ en approximant l'espérance dans l'équation (2.11). Pour ce faire, nous considérons un ensemble X^n de P points dont les coordonnées représentent certaines valeurs possibles pour les sous-jacents au temps t_n :

$$X_n = \{x^{n,p} = (x_1^{n,p}, \dots, x_d^{n,p}), p = 1, \dots, P\} \subset \mathbb{R}^d$$

Supposons maintenant que nous voulons calculer $v^{BM}(t_n, \cdot)$ mais seulement pour $x^{n,p} \in X^n$. Ce but peut être atteint au moyen d'une simulation Monte Carlo. En particulier, pour chaque $x^{n,p} \in X_n$, nous simulons un ensemble de points \tilde{X}_p^n de M valeurs possibles pour $S_{t_{n+1}}$ selon la loi de $S_{t_{n+1}} | S_{t_n} = x$. Pour $i = 1, \dots, d$, $n = 1, \dots, N$, $p = 1, \dots, P$, $k = 1, \dots, 2^d$, nous définissons :

$$\tilde{x}_i^{n,p,k} = x_i^{n,p} e^{(r - \eta_i - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sqrt{\Delta t} \sigma_i \Sigma_i \mathcal{G}_{n,p,k}} \quad (21)$$

Où $\mathcal{G}^{n,p,k}$ est le k -ème vecteur de l'espace $\{-1, +1\}^d$ et Σ_i est la i -ème ligne de la matrice Σ . Ensuite, le prix de l'option peut être approximé pour chaque $x^{n,p} \in X^n$ par :

$$\hat{v}^{BM}(t_n, x^{n,p}) = \max \left(\Psi(x^{n,p}), \frac{e^{-r\Delta t}}{2^d} \sum_{k=1}^{2^d} v^{BM}(t_{n+1}, \tilde{x}^{n,p,k}) \right)$$

si les quantités $v^{BM}(t_{n+1}, \tilde{x}^{n,p,k})$ sont connues pour tous les points simulés $\tilde{x}^{n,p,k}$. Si nous procédons en backward, la fonction $v^{BM}(t, \cdot)$ est connue pour $t = T$ car elle est égale à la fonction de paiement $\Psi(\cdot)$ et grâce à cette approximation, elle est également connue pour $t = t_{N-1}$ et $x^{N-1,p} \in X^{N-1}$. Pour évaluer plus généralement, soit $v_n^{BM,GPR}(\cdot)$ l'approximation GPR de $\hat{v}^{BM}(t_n, \cdot)$ entraîné en considérant X^n comme l'ensemble de prédiction et $\{\hat{v}^{BM}(t_n, x^{n,p}) \mid p = 1, \dots, P\}$ comme l'ensemble de réponse. Ensuite, nous pouvons procéder en sens inverse en calculant :

$$\hat{v}^{BM}(t_{n-1}, x^{n-1,p}) = \max \left(\Psi(x^{n-1,p}), \frac{e^{-r\Delta t}}{2^d} \sum_{k=1}^{2^d} v_n^{BM,GPR}(\tilde{x}^{n-1,p,k}) \right)$$

et en calculant $v^{BM,GPR}$, c'est-à-dire l'approximation GPR de $\hat{v}^{BM}(t_{n-1}, \cdot)$...

Enfin, le prix de l'option au temps $t = 0$ est calculé à travers :

$$\hat{v}^{BM}(0, S_0) = \max \left(\Psi(S_0), \frac{e^{-r\Delta t}}{2^d} \sum_{k=1}^{2^d} v_1^{BM,GPR}(\tilde{x}^{0,k}) \right)$$

où les points $\tilde{x}^{0,1}, \dots, \tilde{x}^{0,2^d}$ sont des simulations aléatoires de S_{t_1} données par :

$$\tilde{x}^{0,k} = S_0 e^{(r - \eta_i - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t + \sqrt{\Delta t}\sigma_i \Sigma_i \mathcal{G}^{0,k}}$$

où $\mathcal{G}^{0,k}$ est le k -ème vecteur de l'espace $\{-1, +1\}^d$ pour tout $k \in \{1, \dots, 2^d\}$.

2.3.2 Le choix des ensembles X^n

Le choix des ensembles X^n , $n = 1, \dots, N - 1$, est une question délicate. Nous allons donc explorer différentes séquences et comparer les résultats ainsi que le temps d'exécution de chacune d'entre elles pour parvenir à une conclusion.

La séquence de Halton

Ici, nous utilisons une séquence déterministe de remplissage de l'espace basée sur la séquence de Halton. Spécifiquement, soit h_p le p -ème point de la séquence quasi-aléatoire de Halton en \mathbb{R}^d et Φ^{-1} l'inverse de la fonction de répartition de la loi normale standard. Nous définissons les points $x^{n,p}$ comme suit :

$$x^{n,p} = S_0 e^{(r - \eta_i - \frac{1}{2}\sigma^2)t_n + \sqrt{t_n}\sigma_i \Sigma_i \Phi^{-1}(H_p)} \quad (22)$$

pour $i = 1, \dots, d$, $n = 1, \dots, N - 1$, et $p = 1, \dots, P$.

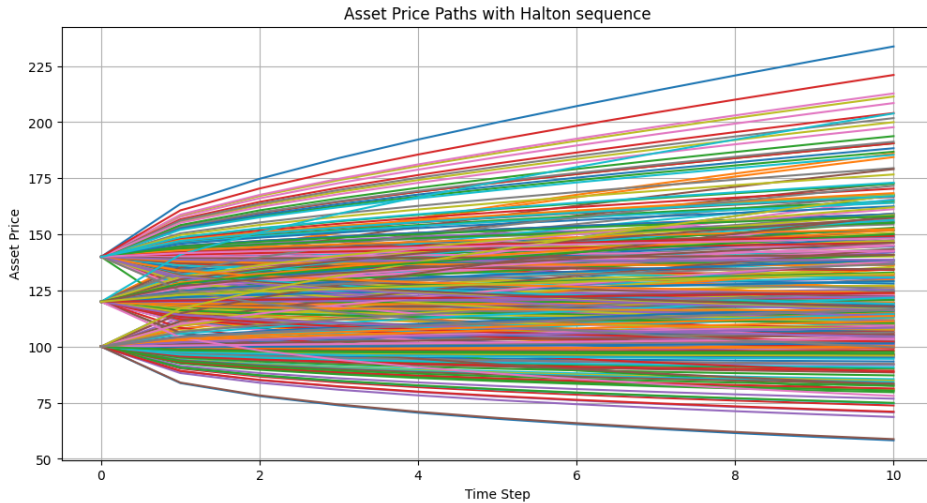


FIGURE 5 – Prix d'un actif tridimensionnel généré par la séquence de Halton

La séquence de Sobol

Nous allons suivre une approche similaire à celle de la séquence de Halton, mais cette fois, nous utiliserons le vecteur h_p comme le p -ème point de la séquence quasi-aléatoire de Sobol dans \mathbb{R}^d .

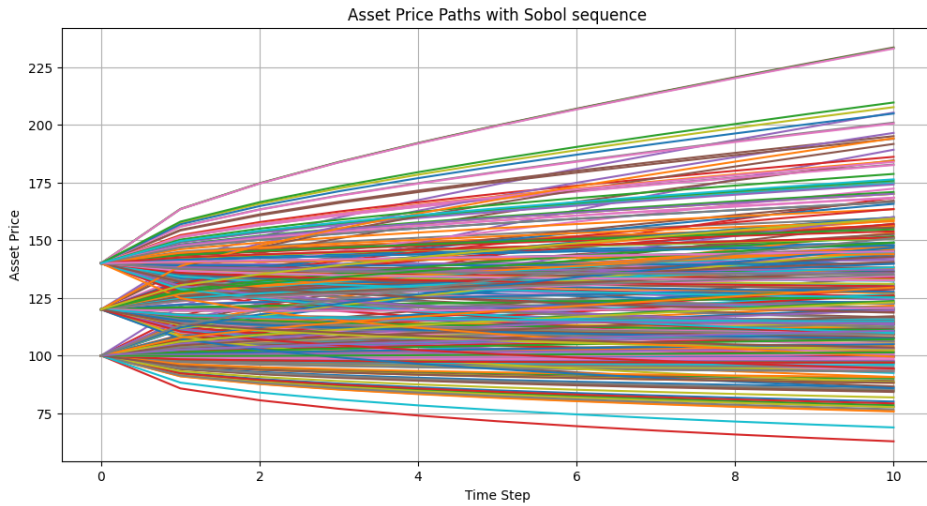


FIGURE 6 – Prix d'un actif tridimensionnel généré par la séquence de Sobol

Mouvement Brownien et Séquence de Halton

Cette méthode implique de simuler le prix de l'actif de manière classique en appliquant directement les équations de Black-Scholes. Dès le premier instant, nous générons S_1 , le prix à cet instant, en utilisant la séquence de Halton décrite par l'équation (2.14). Ensuite, nous continuons à produire les échantillons de prix avec le modèle de Black-Scholes, en prenant S_1 généré par la séquence de Halton comme donnée initiale.

Cette approche vise à disperser les prix des actifs pour qu'un certain nombre d'entre eux atteignent la zone d'intérêt, ce qui permet une meilleure évaluation de l'option, notamment lorsque les prix des actifs sont inférieurs au prix d'exercice.

2.4 Méthodes de Quasi Monte Carlo (QMC)

L'objectif des méthodes de Quasi Monte Carlo (QMC) est de diminuer le facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ de l'erreur de Monte Carlo.

Principe

Le principe consiste à tirer l'échantillon de manière moins aléatoire que Monte Carlo, afin de combler les trous naturels qui se forment dans un échantillon aléatoire. Pour quantifier l'uniformité d'un nuage de points dans $[0, 1]^d$, on utilise la notion de discrédance. ([6])

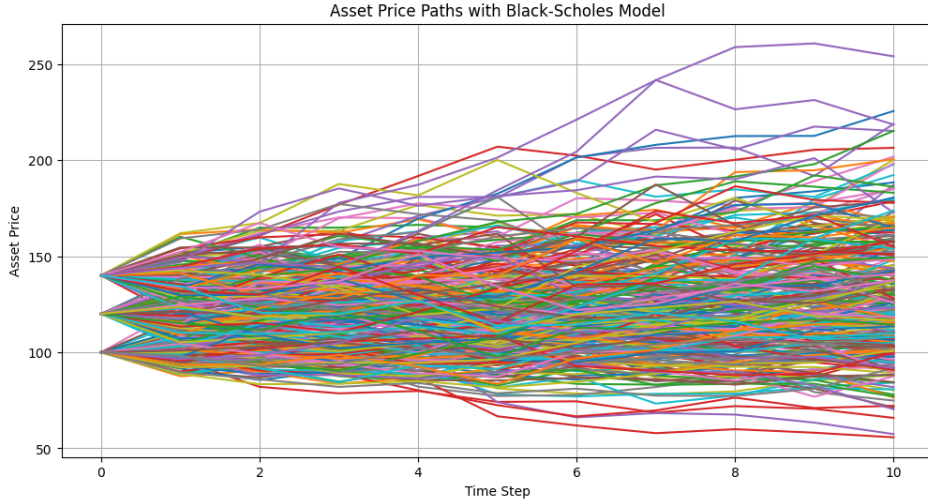


FIGURE 7 – Prix d'un actif tridimensionnel généré par Black-Scholes + Halton

Discrépance

- La discrépance d'une famille de points x_1, \dots, x_n de $[0, 1]^d$ est définie comme :

$$D(x_1, \dots, x_n) = \sup_{B \in J} \left| \frac{\text{Card}\{i = 1, \dots, n : x_i \in B\}}{n} - \lambda_d(B) \right|$$

où J est l'ensemble de tous les pavés de la forme $\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ et λ_d étant la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]^d$.

- La discrépance étoilée d'une famille de points x_1, \dots, x_n de $[0, 1]^d$ est définie comme :

$$D^*(x_1, \dots, x_n) = \sup_{B \in J^*} \left| \frac{\text{Card}\{i = 1, \dots, n : x_i \in B\}}{n} - \lambda_d(B) \right|$$

où J^* est l'ensemble de tous les pavés de la forme $\prod_{i=1}^d [0, b_i]$.

Fluctuations d'une fonction

La variation de Hardy-Krause de $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée par :

$$V^{HK}[f] = \int_{[0,1]^d} |\partial_{x_1} \cdots \partial_{x_d} f(x)| dx + \sum_{i=1}^d V^{HK}[f^{(i)}]$$

où $f^{(i)} : [0, 1]^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$ est ici la restriction de f sur l'hyperplan $x_i = 1$.

Théorème de Koksma-Hlawka

Soit $f : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de variation de Hardy-Krause finie. Alors pour toute famille de points x_1, \dots, x_n de $[0, 1]^d$, on a :

$$\left| \int_{[0,1]^d} f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \right| \leq V^{HK}[f] \cdot D^*(x_1, \dots, x_n)$$

Suites quasi-aléatoires

On dit qu'une suite $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ de $[0, 1]^d$ est quasi-aléatoire si elle satisfait :

$$D^*(x_1, \dots, x_n) \leq c \frac{(\log(n))^d}{n}$$

De telles suites qui vérifient cette propriété existent, comme la séquence de Van Der Corput, la séquence de Halton ou même celle de Sobol.

Parmi les limitations de ces méthodes, il faut choisir un n dépassant une certaine limite pour que leur vitesse de convergence, qui est de l'ordre de $O\left(\frac{(\log(n))^d}{n}\right)$ dépasse celle de Monte Carlo, de l'ordre de $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Typiquement, il faut que $n \gg e^d$. Cette limite peut très rapidement devenir énorme, et les suites à faible discrédance peuvent alors moins bien performer que Monte Carlo.

À titre d'exemple, dans notre code, les deux séquences de Halton et celle de Sobol se comportent très mal avec un nombre d'échantillons (valeurs possibles pour le prix de l'actif à chaque instant) $P = 500$ à partir de la dimension 5. Mais en dimension $d = 2$ avec ce même nombre d'échantillons, les deux séquences donnent des résultats extrêmement précis et très proches du benchmark. Nous nous sommes donc limités aux dimensions 2 et 3 pour lesquelles le code s'exécute dans un temps raisonnable vis-à-vis des capacités de nos machines.

Une autre limitation consiste en le fait que ces suites sont quasi-aléatoires et que dès qu'on augmente en dimension, on constate que les termes générés par cette suite deviennent corrélés, ce qui affecte énormément leur performance. Pour résoudre ce problème, nous avons essayé d'implémenter ce qu'on appelle le "Hybrid Randomization" en randomisant les termes de la séquence de Halton générés en dimension d . Pour ce faire, nous utilisons l'algorithme suivant :

Algorithm 1 Hybrid Randomization pour la suite à faible discrédance

Data: Ensemble de points $\{x_1, \dots, x_n\}$ de la suite à faible discrédance en dimension d et U un vecteur d -dimensionnel tiré selon la loi uniforme sur $[0, 1]^d$

Result: Suite modifiée $\{y_1, \dots, y_n\}$

for $j \leftarrow 1$ **to** n **do**

 | Calculer $y_j = x_j + U \pmod{1}$

end

Utiliser la suite $\{y_1, \dots, y_n\}$ à la place de $\{x_1, \dots, x_n\}$

2.5 Résultats numériques et commentaires

2.5.1 Dimension 2

Pour les applications numériques permettant de tester le bon fonctionnement de notre code, nous avons adopté les mêmes valeurs que celles utilisées dans l'article [3]. En particulier, nous nous sommes placés en dimension $d = 2$ dans un premier temps, avec des actifs tels que $S_0 = (100, 100)$, un vecteur de volatilité sur les deux actifs $\sigma = (0.2, 0.2)$, et une matrice de corrélation Γ telle que :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ 0.2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nos instruments financiers ont une maturité de $T = 1$, et nous subdivisons l'intervalle de temps $[0, T]$ en $n = 10$ sous-intervalles. Le taux d'intérêt est de $r = 0.05$, les actifs choisis ne paient pas de dividendes et le strike est $K = 100$. En outre, nous avons choisi un nombre $P = 500$ d'échantillons, dépassant ainsi largement la limite discutée dans la partie 2.4 ($e^2 \approx 7.38$), ce qui garantit une très bonne performance des séquences à faible discrétion considérées.

GPR Tree Vs Longstaff-Schwartz

Dans un premier temps, nous avons choisi de calculer le prix d'un put américain ainsi que celui d'un call américain unidimensionnel, possédant les mêmes caractéristiques que dans le cas bidimensionnel ($S_0 = K = 100$, $T = 1$, etc.), en utilisant l'algorithme de Longstaff-Schwartz que nous avons implémenté au début du projet et dont nous sommes sûrs du bon fonctionnement. Nous avons ensuite calculé les valeurs de put et de call américains avec le GPR Tree en utilisant les trois séquences. Lorsque nous avons comparé les résultats, nous avons constaté que les valeurs fournies par chaque méthode étaient très proches. Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus :

2-Dimensional Options (GPR Tree) Vs 1-dimensional Options (Longstaff-Schwartz)			
Put Option Prices and Execution Time			
Method	American Put Price (GPR_Tree)	European Put Price	Execution Time
Sobol sequence	(6.09, 6.08)	(5.62, 5.22)	62.69
Halton sequence	(6.1, 6.08)	(5.48, 5.33)	58.76
Black-Scholes process + Halton initialization	(6.09, 6.08)	(5.51, 5.51)	61.65
Longstaff-Schwartz	6.05	5.72	0.10
Call Option Prices and Execution Time			
Method	American Call Price (GPR_Tree)	European Call Price	Execution Time
Sobol sequence	(10.49, 10.47)	(10.8, 10.88)	68.95
Halton sequence	(10.5, 10.47)	(10.97, 9.87)	53.77
Black-Scholes process + Halton initialization	(10.48, 10.44)	(10.8, 10.78)	54.33
Longstaff-Schwartz	10.87	10.92	0.10

TABLE 2 – Option Prices and Execution Time

Remark. Dans ce tableau, nous observons que les valeurs des Calls européens et américains sont quasiment égales, que ce soit pour la méthode GPR Tree ou Longstaff Schwartz. Ce constat est extrêmement positif et s’aligne avec les prédictions théoriques. En effet, dans le cadre du modèle de Black-Scholes avec un taux d’intérêt positif et l’absence de dividendes, il n’est jamais avantageux d’exercer un call américain avant la maturité. En d’autres termes, il est équivalent au call européen et donc, aura la même valeur que celui-ci.

Pricing avec GPR Tree

Dans cette section, nous présentons les résultats obtenus en utilisant la méthode GPR Tree pour évaluer différents types d’options américaines : les options de panier géométrique (*Geometric basket put options*), les options de panier arithmétique (*Arithmetic basket put options*) et les options d’achat sur le maximum (*Call on the max options*).

Le tableau ci-dessous résume les valeurs obtenues pour chaque type d’option et les compare avec les références (*benchmarks*) de l’article. Nous observons que les valeurs retournées sont très proches des références fournies, ce qui témoigne de la performance de la méthode GPR Tree dans l’évaluation des options américaines.

2-Dimensional Options			
Geometric Basket Put Option Prices and Execution Time			
Method	American GBP Price (GPR_Tree)	European GBP Price	Execution Time
Sobol sequence	4.61	3.71	55.07
Halton sequence	4.61	4.3	54.47
Black-Scholes process + Halton initialization	4.6	4.58	54.75
Benchmark	4.62	-	-
Arithmetic Basket Put Option Prices and Execution Time			
Method	American ABP Price (GPR_Tree)	European ABP Price	Execution Time
Sobol sequence	4.42	4.12	60.93
Halton sequence	4.43	3.85	58.55
Black-Scholes process + Halton initialization	4.43	3.63	60.12
Benchmark	4.42	-	-
Call on the Max Option Prices and Execution Time			
Method	American COTM Price (GPR_Tree)	European COTM Price	Execution Time
Sobol sequence	16.89	16.82	76.45
Halton sequence	16.92	16.73	74.03
Black-Scholes process + Halton initialization	16.88	15.00	70.77
Benchmark	16.86	-	-

TABLE 3 – Option Prices and Execution Time for 2-Dimensional Options

Remark. Le tableau ci-dessus fournit également les temps d’exécution pour chaque séquence. Nous observons que généralement, les trois séquences conduisent à des temps d’exécution

similaires, avec des valeurs légèrement plus petites pour la séquence Black-Scholes + Halton.

Analyse Graphique des Résultats

Dans cette section, nous présenterons des graphiques permettant d’approfondir l’intuition et la compréhension des résultats générés par le GPR Tree.

Geometric basket put option La figure 8 ci-dessous illustre les valeurs intrinsèques en fonction du temps de cinq échantillons d’options de panier géométrique en dimension 2, pour chacune des trois séquences utilisées.



FIGURE 8 – Valeur intrinsèque en fonction du temps pour 5 options GBP

Maintenant, nous sélectionnons un échantillon au hasard et tentons de représenter, pour les trois séquences, la dynamique des prix de l’actif choisi en fonction du temps (figure 9). Nous notons par *Asset 1* et *Asset 2* respectivement les deux actifs sélectionnés aléatoirement parmi les 500 échantillons sur lesquels notre modèle a été entraîné.

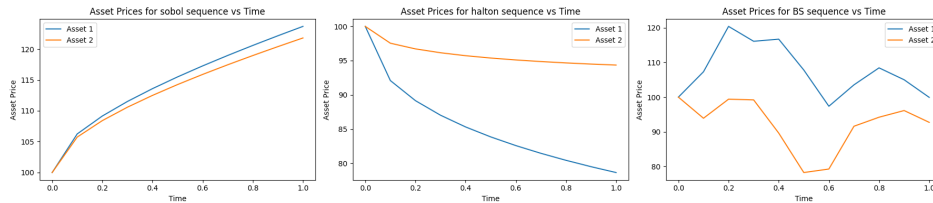


FIGURE 9 – Dynamique de l’actif en fonction du temps

La figure 10 regroupe les prédictions de temps d’exercices optimaux pour cet échantillon.

La première ligne représente pour chaque séquence l’instant auquel le modèle a prédit d’exercer l’option GBP associée. Cet instant est représenté en binaire (0 : attendre / 1 : exercer) à chaque pas de temps, en supposant que le détenteur de l’option ne l’a pas exercé avant.

Dans la deuxième ligne, on trace à chaque instant les valeurs de continuation en fonction de la valeur intrinsèque de l’option, ainsi que la droite $y = x$ dont nous aurons besoin pour visualiser l’instant où nous devons exercer l’option. Cela correspond en effet au premier instant où le nuage des points passe en dessous de cette droite, c’est-à-dire le premier instant où la valeur intrinsèque dépasse la valeur de continuation.

Finalement, la dernière ligne des figures représente à la fois les valeurs de continuation (en bleu) et les valeurs intrinsèques (en orange) à chaque instant en fonction du temps.

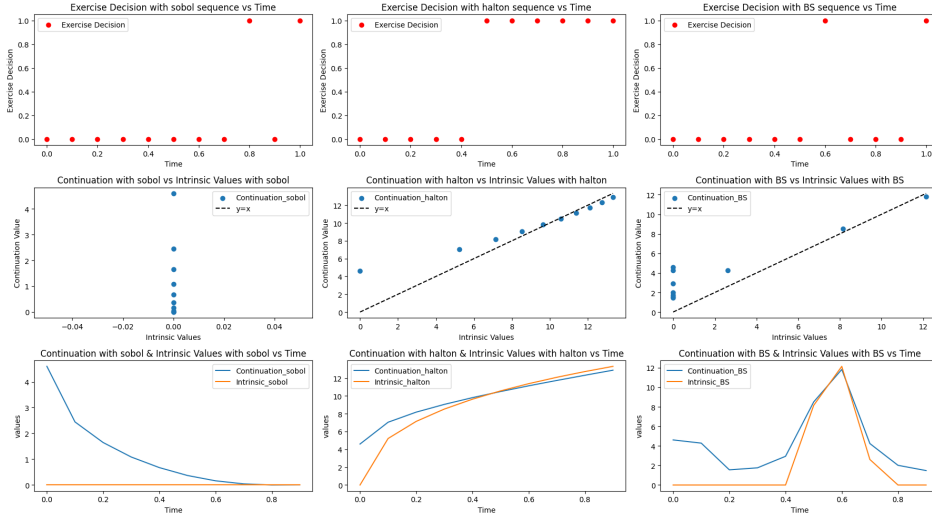


FIGURE 10 – Temps d’exercice de l’option

La première ligne de la figure représente [...], et la deuxième ligne représente [...].

Remark. Dans ce cas, on remarque que pour l’actif choisi pour la séquence de Sobol, presque tout le temps le modèle suggère qu’il vaut mieux continuer à détenir l’option, car la valeur intrinsèque est en fait nulle jusqu’à l’instant 0.8. Cela justifie le fait d’avoir une droite horizontale de la valeur de continuation en fonction de la valeur intrinsèque.

Nous concluons cette section en soulignant que cette analyse graphique peut être étendue aux deux autres types d’options. Cependant, en raison de contraintes de longueur, nous préférons les présenter lors de la soutenance.

Évaluation de la performance du GPR Tree sur des données non observées

Nous allons maintenant évaluer les performances de notre modèle sur une nouvelle dynamique de Black-Scholes qu’il n’a jamais rencontrée lors de la phase d’entraînement. Nous examinerons son comportement en testant le modèle pour une seule dynamique, puis nous représenterons graphiquement les résultats (figure 11), comme nous l’avons fait dans la section précédente.

Chaque ligne de graphiques correspond au comportement d’une séquence spécifique. Par exemple, la première ligne de graphiques est dédiée à la séquence de Sobol.

N.B : L’option en question ici est le panier géométrique.

Mesure du Profit & Loss de la stratégie suggérée

Afin de s’assurer de la consistance de notre modèle dans le choix de la stratégie optimale, nous avons réalisé une estimation Monte Carlo du PnL moyen généré pour une option de type *Geometric Basket Put* sur $N = 500$ nouveaux échantillons suivant la dynamique Black-Scholes $(S^{(k)})_{k \in \{1, 2, \dots, N\}}$.

Le PnL_k pour un échantillon k est défini comme la différence entre la valeur intrinsèque (actualisé) au premier temps d’exercice recommandé par l’algorithme τ^* et la valeur de l’option $p(t = 0, S_0, K, T)$:

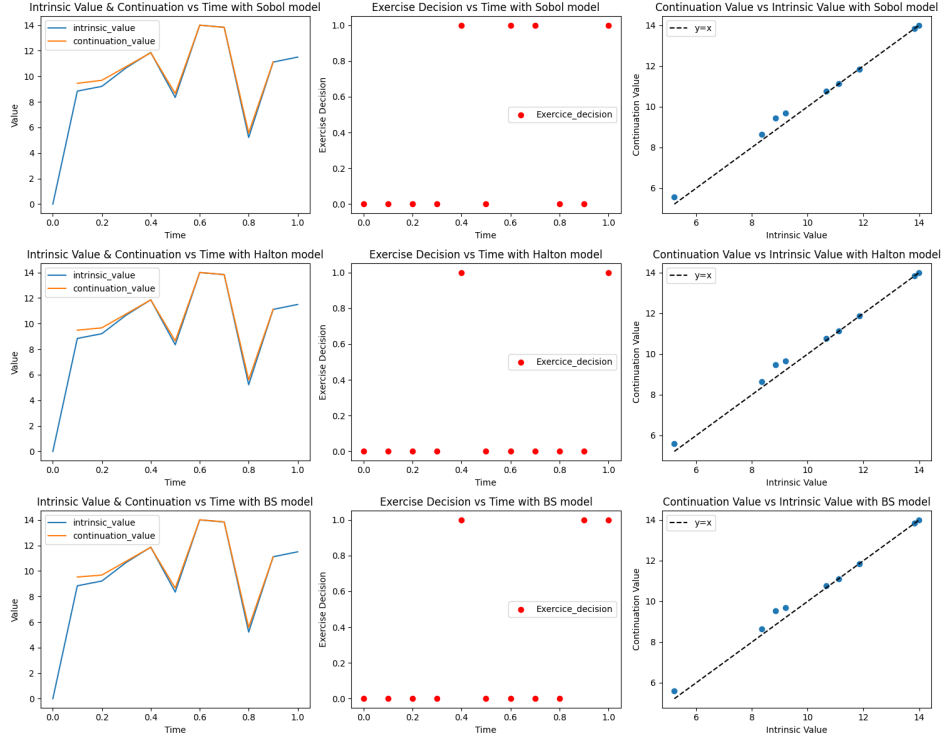


FIGURE 11 – Temps d'exercice pour un acif non observé

$$\text{PnL}_k = e^{-r\tau^*} \max \left(0, \left(K - \left(\prod_{i=1}^d S_{\tau^*}^{i,(k)} \right)^{\frac{1}{d}} \right) \right) - p(0, S_0, K, T) \quad (23)$$

On calcule ensuite le PnL moyen pour ces divers échantillons :

$$\text{PnL} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{PnL}_k \quad (24)$$

Le tableau 4 ci-contre présente les résultats obtenus après évaluation sur chacune des séquences utilisées durant l'entraînement.

Le temps d'arrêt τ^* représente ici le premier instant où la valeur intrinsèque de l'option dépasse la valeur de continuation espérée. En effet, lors de la phase d'entraînement, nous avons conservé à chaque instant les paramètres des modèles d'apprentissages GPR durant la propagation backward. Les prédictions sur un nouvel échantillon se font alors en utilisant ces modèles, partant de l'instant initial et prédisant en forward jusqu'à la première condition d'exercice atteinte. Le choix d'exercer au **premier instant** est alors propre à cette stratégie sur l'option américaine qui n'autorise l'exercice qu'une fois maximum. En effet, en observant attentivement la figure 11, on réalise qu'il n'y a généralement pas qu'un unique temps proposé; cette approche propose ainsi une extension aux **Options échelonnées** autorisant aux détenteurs d'exercer une partie de l'option à certaines dates et le reste à des dates ultérieures.

Ces résultats présentent un $\text{PnL} \approx 0$ pour chacune des séquences. Ce qui suggère qu'en moyenne les modèles réussissent bien à répliquer une stratégie qui couvre parfaitement le prix de l'option.

Séquence	PnL moyen	Intervalles de confiance (95%)
Sobol	0.19	[-0.35, 0.75]
Halton	0.07	[-0.45, 0.60]
BS + Halton	0.07	[-0.46, 0.61]

TABLE 4 – PnL obtenu avec $N = 500$ échantillons.

Convergence des trois séquences

Dans cette section, nous évaluons la convergence du modèle basé sur chacune des trois méthodes distinctes de génération de prix d'actifs : la séquence de Halton, la séquence de Sobol, et la dynamique de Black-Scholes + Halton. Nous avons pu voir que chacune de ces dynamiques a démontré sa capacité à fournir un pricing conforme au Benchmark, cependant le coût computationnel et le nombre d'échantillons requis pour la convergence crée un différentiel entre ces méthodes. L'analyse comparative de leur convergence nous permettra de mieux appréhender leurs performances respectives dans notre contexte d'étude.

La figure 12 ci-dessous nous présente la vitesse de convergence de l'algorithme de pricing utilisant chacune de ces séquences

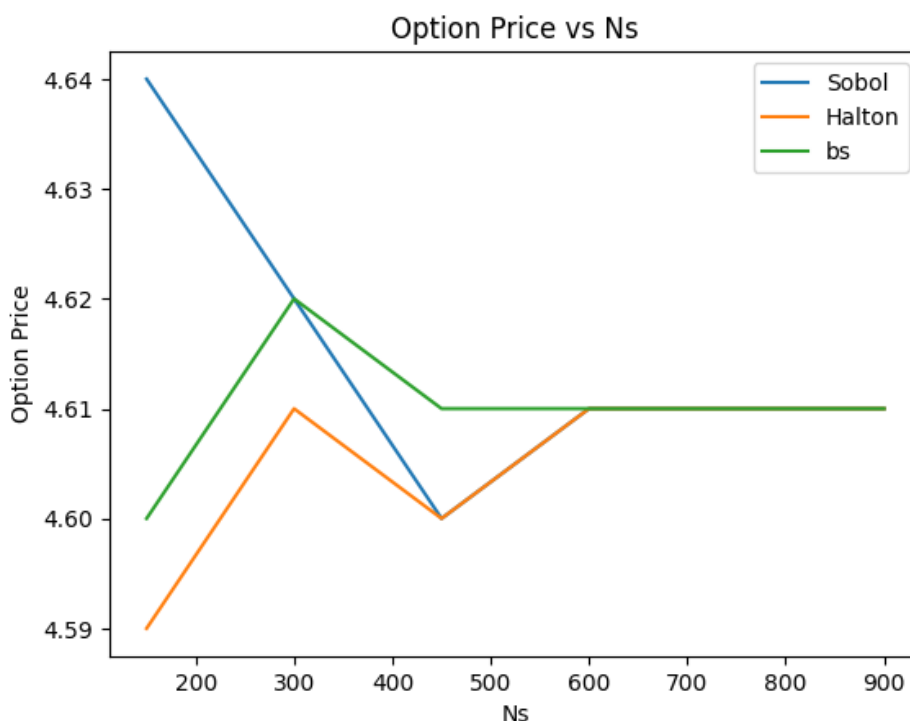


FIGURE 12 – Convergence des 3 séquences en fonction du nombre d'échantillons utilisés

On remarque alors que le modèle basé sur une séquence incluant le modèle de Black-Scholes converge bien plus rapidement (pour $N \geq 450$) que les séquences pures de Halton et de Sobol ($N \geq 600$). En effet ces deux autres séquences ne font qu'une approximation des trajectoires possibles de l'actif, toutefois le compromis se fait au niveau de la complexité de l'échantillonnage, cette dernière est plus importante pour une dynamique pure de Black-Scholes, alors que beaucoup plus simple pour les séquences de Halton.

2.5.2 Dimension 5

Les résultats numériques du modèle en dimension 5 sont maintenant exposés. Malgré la condition $N > e^5 \sim 148$, il est déjà remarquable que les séquences ne convergent pas vers les valeurs attendues. En effet, pour le GBP, les erreurs engendrées par les séquences à faible discrétion (Halton et Sobol) sont significatives. En revanche, la séquence combinant Black-Scholes et Halton présente des performances nettement meilleures. Ce phénomène est également observé pour l'ABP. Ainsi, il est confirmé qu'en haute dimension, si le nombre d'échantillons N ne dépasse pas largement la limite e^d , des problèmes de convergence surviennent.

5-Dimensional Options			
Geometric Basket Put (GBP)			
Method	American GBP Price (GPR_Tree)	European GBP Price	Execution Time
Sobol sequence	2.66	2.84	59.26
Halton sequence	2.66	2.83	58.80
Black-Scholes + Halton initialization	3.45	3.05	60.67
Benchmark	3.44	-	-
Arithmetic Basket Put (ABP)			
Method	American ABP Price (GPR_Tree)	European ABP Price	Execution Time
Sobol sequence	3.18	2.35	62.53
Halton sequence	2.92	2.76	59.57
Black-Scholes + Halton initialization	2.97	2.62	60.93
Benchmark	3.15	-	-
Call on the Max			
Method	American Call on the Max Price (GPR_Tree)	European Call on the Max Price	Execution Time
Sobol sequence	27.6	28.27	61.60
Halton sequence	27.59	26.32	62.68
Black-Scholes + Halton initialization	26.97	27.26	61.16
Benchmark	27.20	-	-

TABLE 5 – Option Prices and Execution Time for 5-Dimensional Options

Conclusion

Pour conclure ce rapport, nous souhaitons présenter un résumé des différentes stratégies examinées. Notre analyse a débuté par l'exploration de l'algorithme de Longstaff-Schwartz, principalement utilisé pour évaluer des options américaines dans un cadre unidimensionnel, se concentrant sur des options classiques de call et put américains. À la suite de cette investigation, nous avons développé une métrique pour évaluer sa performance, à savoir le PnL moyen sur un nombre déterminé d'échantillons. Nous avons constaté que le PnL moyen converge efficacement vers la valeur attendue (zero), ce qui nous conduit à conclure que l'algorithme parvient à reproduire efficacement les options américaines.

Nous avons ensuite introduit la méthode GPR Tree et étudié l'importance des séries à faible discrétion en termes de pricing des options. En calculant la même métrique pour la méthode GPR, nous avons constaté qu'avec seulement 500 échantillons, le PnL est déjà très proche de zéro, ce qui indique que la méthode GPR Tree excelle en termes de réplique des options américaines.

Un autre résultat important auquel nous sommes parvenus est qu'il existe d'autres séquences qui se comportent aussi bien, voire mieux, que les séquences de Sobol ou de Halton. Notamment la séquence Black-Scholes + Halton, qui converge pour un nombre d'échantillons plus petit que celui nécessaire par les séquences quasi-aléatoires.

Bibliographie

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, 1970.
- [2] L. Goudenège, A. Molent, and A. Zanette. Machine learning for pricing american options in high dimension. *arXiv preprint arXiv :1903.11275*, Dec 2019.
- [3] L. Goudenège, A. Molent, and A. Zanette. Machine learning for pricing american options in high-dimensional markovian and non-markovian models. *arXiv preprint arXiv :1903.11275*, Jun 2019.
- [4] Francis A Longstaff and Eduardo S Schwartz. Valuing american options by simulation : A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14(1) :113–147, 2001.
- [5] Chenyang Lü. Introduction to gaussian process regression - part 1 : The basics, 2018. Consulté le 05 mars 2024.
- [6] University of Waterloo. Quasi-monte carlo method, 2024. Consulté le 06 mars 2024.